«Buoni problemi» sulla proporzionalità: idee per un curricolo verticale

Faenza, 4 settembre 2013

Daniela Medici
Maria Gabriella Rinaldi

daniela.medici@unipr.it
mariagabriella.rinaldi@unipr.it

Perché la scelta dell'argomento "proporzionalità"?

- Saper utilizzare correttamente il pensiero proporzionale è molto utile al cittadino (sconti, ricette, lettura di carte, corretta interpretazione di statistiche, percentuali, …)
- Il pensiero proporzionale si può iniziare a costruire fin dai primi anni scolastici
- Sperimentazioni su soggetti adulti e le prove INVALSI hanno messo in luce difficoltà

I - 17- 2010. Nonna Pina l’anno scorso con 21 Kg di prugne ha preparato 7 Kg di marmellata. Quest’anno vuole fare 10 Kg di marmellata.

a. **Quanti chili di prugne le serviranno?**

Risposta: ………………………… Kg

b. Scrivi come hai fatto per trovare la risposta.

……………………………………………………

……………………………………………………

corretta 45,2% **errata 40,8%** **nulla 13,9%**

Van Dooren et al.: ”Cognition and Instruction” (2005)
in Atti CERME 6 (2009)

Un gruppo di 5 musicisti suona un pezzo in 10 minuti.

Un altro gruppo di 35 musicisti suonerà lo stesso pezzo domani.

Quanto impiegherà? Perché?

Risposte corrette:

12-13 anni 41%

15-16 anni 68%

BIGNÉ AL CIOCCOLATO (Cat. 6, 7, 8) 21°, I, 10

Al bar del club di vacanze Archimede, ci sono sempre ottimi bignè al cioccolato.
Ogni giorno, dal lunedì al venerdì, il bar si fa consegnare lo stesso numero di bignè,mentre il sabato e la domenica ne ordina 20 in più rispetto agli altri giorni, perché c'è maggiore richiesta.
Ogni giorno della scorsa settimana (dal lunedì alla domenica) sono stati venduti tutti i bignè. Il sabato e la domenica, complessivamente, ne sono stati venduti 4 in più di quelli che sono stati venduti durante tutto il resto della settimana.

Quanti bignè al cioccolato arrivano al bar ogni giorno della settimana?

Spiegate il vostro ragionamento.

Bignè al cioccolato protocollo cat. 8

RISOLVO:

ABBIAMO FATTO: $40:2=x:5$ $x=\frac{40\cdot 5}{2}=100$ $\frac{100}{5}=20$

PERCHÈ ABBIAMO PRESO I 20 BIGNÈ IN PIÙ CHE IN 2 GIORNI SONO 40, QUINDI 40:2 E DOVEVAMO TROVARE QUANTI BIGNÈ IN 5 GIORNI, QUINDI X:5. L'ABBIAMO RISOLTO E INFINE ABBIAMO FATTO DIVISO 5 ED CI È RISULTATO 20, CIOÈ QUANTI BIGNÈ AL GIORNO, A PARTE AL SABATO E ALLA DOMENICA SONO 20 IN PIÙ AL GIORNO.

IN UNA SETTIMANA I BIGNÈ AL CIOCCOLATO CHE ARRIVANO AL BAR SONO:

$20\cdot 7+40=180$

20 PER I 7 GIORNI DELLA SETTIMANA, PIÙ I 40 IN PIÙ AL SABATO E ALLA DOMENICA.

Bignè al cioccolato,   protocollo cat. 8

Abbiamo supposto che per risolvere il problema dovevamo usare la proporzione

$$x: 20 = 4 : 20$$

perché ci dice quanti bignè arrivano al bar ogni giorno della settimana.

Risolvono quindi diligentemente la proporzione e trovano x = 4 !

Nella sezione di Parma ricorre ad una proporzione il 13% di cat. 8

III (2010)- 9. Il prezzo *p* (in euro) di una padella dipende dal suo diametro *d* (in cm)

secondo la seguente formula:

$$p = \frac{1}{15} d^2$$

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

a. Il prezzo della padella è direttamente proporzionale al suo diametro □ **V** 61,5% □ **F** 34,3 %

b. Il prezzo della padella aumenta all'aumentare del suo diametro

□ **V** 83,9 % □ **F** 12,6 %

c. Il rapporto fra il diametro della padella e il suo prezzo è 15

□ **V** 27,7 % □ **F** 67,6 %

un quesito sul quale, di solito, sono **tutti d'accordo:**

Aggiungendo 3 cm ad entrambe le misure dei lati di un rettangolo, si ottiene un rettangolo simile?

Cosa non ha funzionato?

Difficoltà legate all'acquisizione del pensiero proporzionale persistenti anche in età adulta

Difficoltà nel riconoscere una situazione di proporzionalità

La riuscita precoce riguarda, in particolare, la ricerca di una quarta proporzionale, mentre gli insuccessi concernono soprattutto il riconoscimento di situazioni di proporzionalità.

(Levain e Vergnaud, 1995)

Perché il pensiero proporzionale è "difficile"?

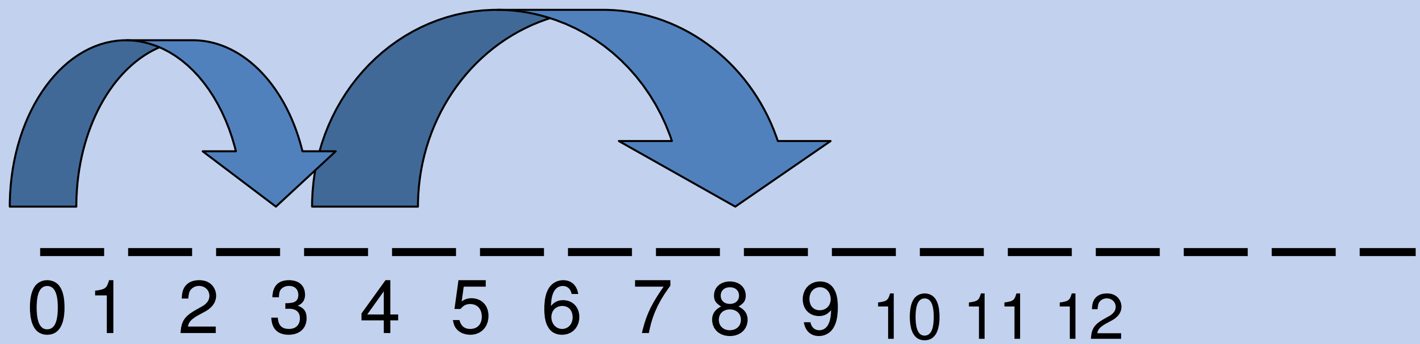
Si tratta di superare la "barriera" del

campo concettuale delle strutture additive

per entrare nel

campo concettuale delle strutture moltiplicative

L’addizione



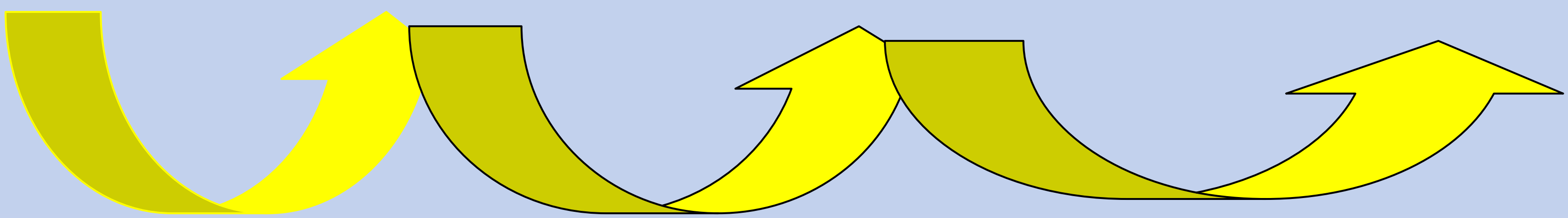
3 + 5 = 8

Addizione, sottrazione, traslazioni, spostamenti su una linea

La moltiplicazione

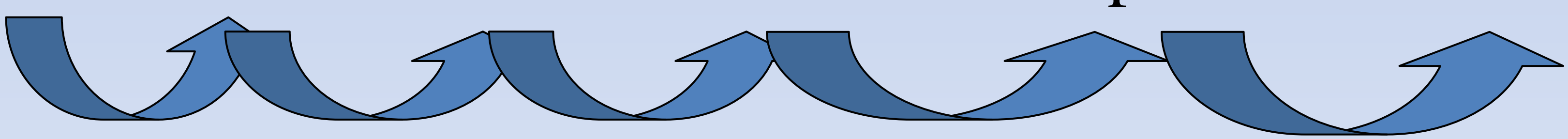
Viene presentata come addizione ripetuta, visualizzando sulla linea dei numeri:

1_2_3_4_5_6_7_8_9_10_11_12_13_14_15



3 x 5 = 15

3 “salti” da 5   3 volte 5   5 preso 3 volte



… o 5 volte 3 ?

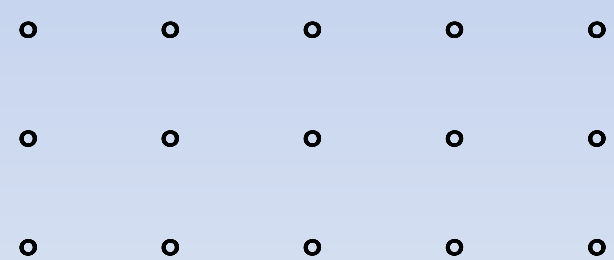
La moltiplicazione

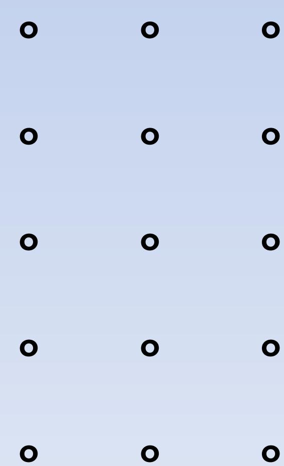
$3 \times 5 = 15$

5 “salti” da 3 o 3 “salti” da 5?

I due numeri non hanno lo stesso “statuto”

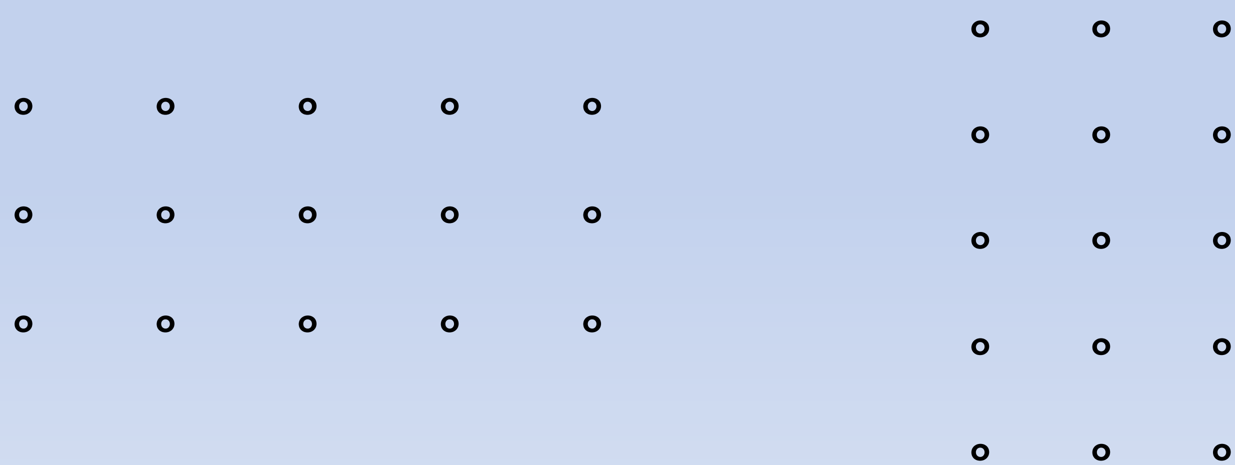
Salto dimensionale: la rappresentazione più corretta della moltiplicazione è nel piano





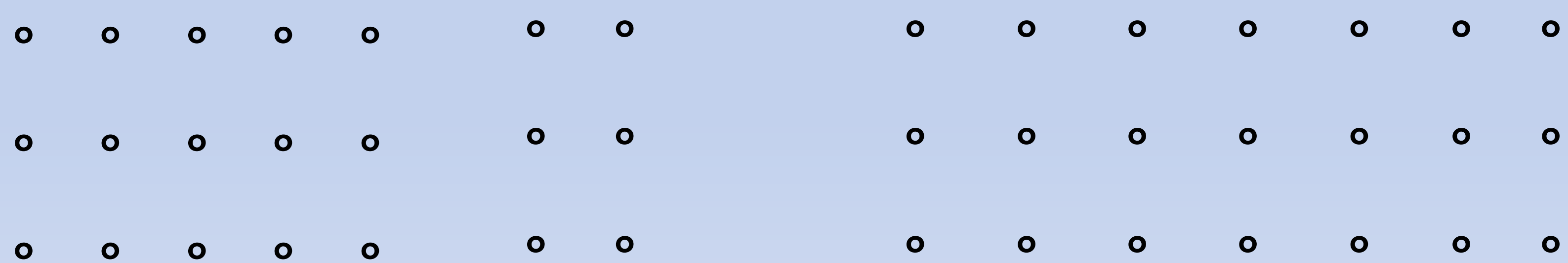
La moltiplicazione

La rappresentazione più corretta della moltiplicazione è nel piano: si “vede” facilmente anche la proprietà commutativa:



La moltiplicazione

e la proprietà distributiva della moltiplicazione:



$$5 \times 3 \quad + \quad 2 \times 3 \quad = \quad (5 + 2) \times 3 = 7 \times 3$$

Proporzioni e “pensiero proporzionale”

Quando si insegnano le proporzioni?

Quando si costruisce (o si può cominciare a costruire) il pensiero proporzionale?

- Strumento matematico
- Oggetto matematico

La proporzionalità nell'allievo è percepita in modo intuitivo molto tempo prima del suo studio in classe (generalmente nella seconda classe di scuola secondaria di primo grado) ed è in rapporto stretto con la sua progressione nel campo concettuale della moltiplicazione.

f. Jaquet

Alla scuola elementare è possibile acquisire il pensiero proporzionale **gradualmente** mediante:

Problemi tradizionali o Problemi non-standard

- in ambito aritmetico o geometrico
- attraverso attività manipolative e non

Problemi e attività per:

- rafforzare il campo concettuale della strutture moltiplicative
- costruire il pensiero proporzionale

A questo livello scolare tale percorso non si deve concludere con l'istituzionalizzazione dei concetti.

OLGA LA BALENA (CAT. 3)

La balena Olga si chiede:

«Quanti uomini occorreranno per fare il mio peso?».

Voi potete aiutarla seguendo queste indicazioni:

5 mucche fanno il peso di un elefante;

10 uomini fanno il peso di una mucca;

30 elefanti fanno il peso di una balena.

Quanti uomini sono necessari per fare il peso di Olga?

Spiegate come avete fatto a trovare la risposta.

Le condizioni si possono trasformare così:

Un elefante pesa come 5 mucche **e = 5 m**

Una mucca pesa come 10 uomini **m = 10 u**

Una balena pesa come 30 elefanti **b = 30 e**

Procedendo per sostituzioni successive:

una balena pesa 30 volte un elefante: **30 e**

cioè come 30 x **5 m**

cioè come 30 x 5 x **10 u**

quindi come 1500 uomini

CREMA AL CIOCCOLATO (Cat. 5, 6, 7) 20°,I, 10

Celeste, Gianna e Sofia utilizzano la stessa ricetta per fare una crema al cioccolato. Perché la crema al cioccolato venga bene, non bisogna sbagliarsi nelle quantità di uova e di cioccolato.

Celeste ha utilizzato 4 uova e 200 grammi di cioccolato.

Gianna ha utilizzato 6 uova e 250 grammi di cioccolato.

Sofia ha utilizzato 10 uova e 500 grammi di cioccolato.

Una delle tre bambine non ha utilizzato la giusta quantità di cioccolato.

Chi non ha utilizzato la giusta quantità di cioccolato?

Spiegate il perché.

CAT 5	2,9
CAT 6	3,1
CAT 7	3,6

Punteggi medi secondo la griglia:

4 Risposta esatta (Gianna si è sbagliata) con una spiegazione completa

3 Risposta esatta (Gianna si è sbagliata) con una spiegazione poco chiara

2 Risposta esatta senza spiegazione
o risposta sbagliata per errore di calcolo ma con ragionamento interamente corretto

1 Risposta sbagliata o assente, ma in una parte dei calcoli viene presa in considerazione la proporzionalità

0 Incomprensione del problema
oppure risposta sbagliata (Sofia) a causa del ragionamento solo additivo

Aiuole colorate

Claudio sta piantando due aiuole di tulipani, vuole usare un miscuglio di tulipani rossi e gialli.

Nella prima ogni 3 tulipani gialli pianta 7 tulipani rossi.

Nella seconda ogni 2 tulipani gialli pianta 3 tulipani rossi.

Quale aiuola vedrà più gialla?

adattamento da un problema tratto da
Proposte di lavoro e riflessioni sui numeri razionali - IPRASE

Occorre capire che l’aiuola che si vede più gialla è quella che ha più fiori gialli a parità di tulipani rossi

Oppure quella che ha più fiori gialli a parità di numero totale di tulipani

Ciò che conta è cioè il rapporto fra i due colori (**giallo**/**rosso** oppure **rosso**/**giallo**) oppure il rapporto tra gialli e totale (**gialli/totale**),

ma **non occorre il concetto di rapporto** per risolvere il problema.

Prima aiuola

rossi	7	14	21	28	35	
gialli	3	6	9	12	15	

Seconda aiuola

rossi	3	6	9	12	15	18	21	24
gialli	2	4	6	8	10	12	14	16

Le tabelle si possono confrontare a parità di fiori rossi o gialli

Prima aiuola

rossi	7	14	21	28	35	
gialli	3	6	9	12	15	
totale	10	20	30	40	50	

Seconda aiuola

rossi	3	6	9	12	15	18	21	24
gialli	2	4	6	8	10	12	14	16
totale	5	10	15	20	25	30	35	40

Le tabelle si possono confrontare a parità del totale di fiori

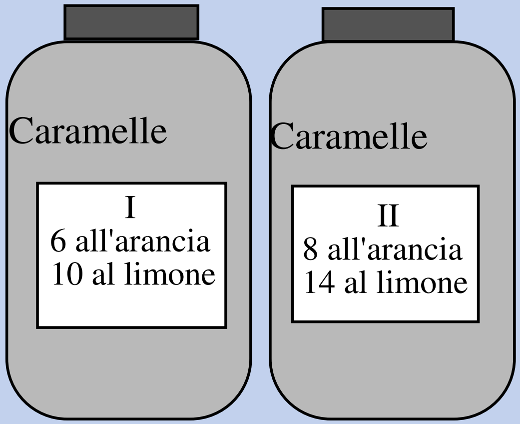
I BARATTOLI DI CARAMELLE (Cat. 5, 6, 7, 8, 9, 10) (14°RMT,I,10)

Nonna Matilde mette in un barattolo 6 caramelle all'arancia e 10 al limone.

In un secondo barattolo mette 8 caramelle all'arancia e 14 al limone.

Le caramelle hanno la stessa forma e sono incartate nello stesso modo.

La nonna sa che a Giulio non piacciono le caramelle al limone e quindi gli dice:



«Puoi prendere una caramella. Ti lascio scegliere il barattolo nel quale puoi infilare la mano, senza guardare dentro».

Giulio ci pensa un po' e sceglie infine il barattolo che, secondo lui, gli offre più possibilità di prendere una caramella all'arancia.

Al posto di Giulio quale barattolo scegliereste? Spiegate il vostro ragionamento.

Oppure: determinare e confrontare i rapporti del numero di caramelle all'arancia e il numero totale di caramelle di ciascun barattolo.

I	Arancia	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66
	Limone	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
	Totale	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176

II	Arancia	8	16	24	32	40	48	56	64	…
	Limone	14	28	42	56	70	84	96	112	…
	Totale	22	44	66	88	110	132	154	176	…

e constatare che si possono confrontare facilmente:

42 / 70 e 40 / 70 (arance a parità di limone)

oppure 66 / 176 e 64 /176 (arance a parità di totale)

oppure 24 / 40 e 24 / 42 (limone a parità di arance)

oppure 48 / 128 e 48 / 132 (totale a parità di arance)

e dedurne che la scelta del primo è la più favorevole ad avere una caramella all'arancia.

Attribuzione dei punteggi

- **4** Risposta corretta (primo barattolo) con spiegazione chiara del ragionamento seguito
- **3** Risposta corretta, ma spiegazione incompleta o poco chiara
- **2** Risposta corretta senza spiegazione

  oppure errore di calcolo ma risposta coerente, con spiegazione
- **1** Avvio di ragionamento corretto
- **0** Incomprensione del problema

I Barattoli di caramelle

media dei punteggi per categoria

- cat. 5: 0,54
- cat. 6 : 0,02
- cat. 7 : 0,65
- cat. 8 : 2,2
- cat. 9: 2
- cat.10: 3,9

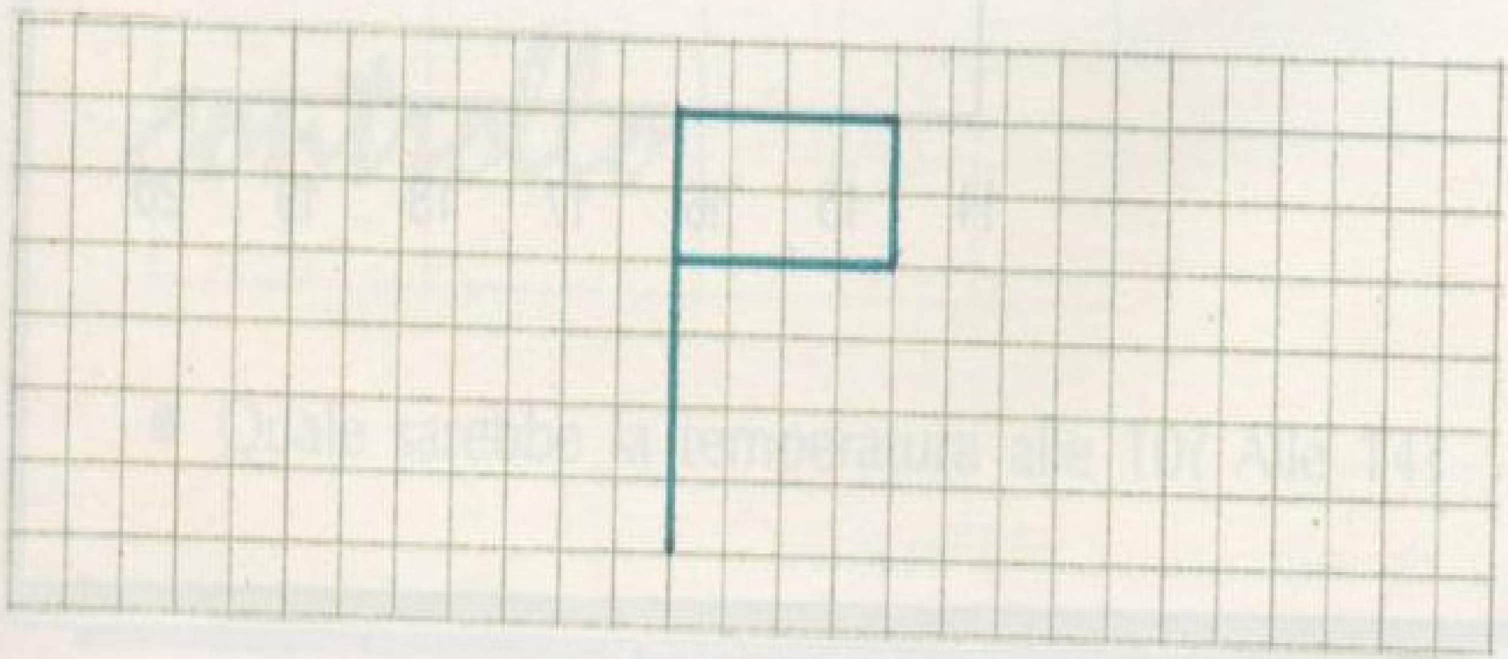
Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria
Indicazioni nazionali 2012

Ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce rappresentazioni (tabelle e grafici). Ricava informazioni anche da dati rappresentati in tabelle e grafici

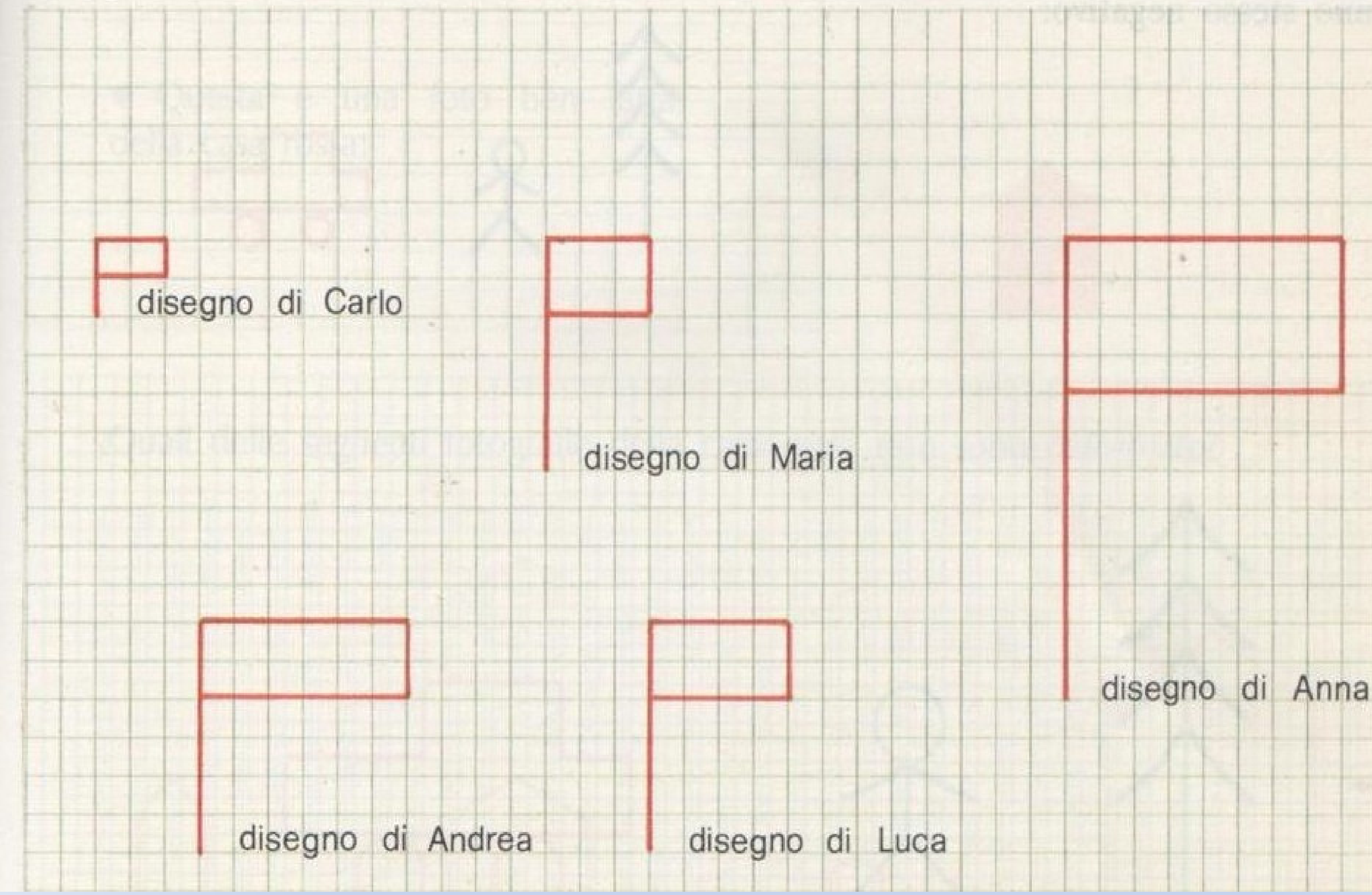
Ingrandimenti e rimpicciolimenti

Tratto da un'idea di F. Speranza

La maestra ha fatto un disegno alla lavagna e l'ha fatto ricopiare sul quaderno ad ogni bambino.



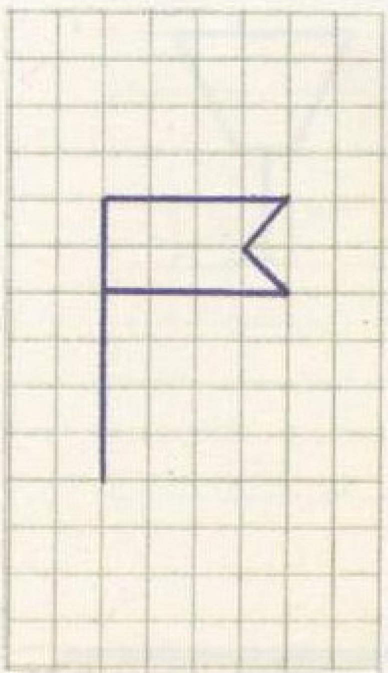
Disegni dei bambini:



Chi, tra Carlo, Maria, Anna, Andrea e Luca ha ricopiato meglio? ....

Perché? ....

Il giorno dopo la maestra ha disegnato una bandiera.
Disegna tu alcune copie «ben fatte» della bandiera.



Scuola secondaria di primo grado

Problemi di carattere geometrico

Problemi di carattere aritmetico

L'uguaglianza di due frazioni, che scaturisce da ogni situazione, permette di "istituzionalizzare" una nuova parola:

«proporzione»

Dalle Indicazioni nazionali 2012

Relazioni e funzioni

- ***Esprimere la relazione di proporzionalità con un'uguaglianza di frazioni e viceversa.***

- ***Usare il piano cartesiano per rappresentare relazioni e funzioni del tipo $y=ax$, $y=a/x$, $y=ax^2$, $y=2^n$ e i loro grafici e collegare le prime due al concetto di proporzionalità.***

Ci avviamo adesso allo studio di due importanti concetti: quello di rapporto e quello di proporzione

Ma i rapporti non li conoscono già?

$a : b$

antecedente conseguente

$$\frac{a}{b}$$

antecedente

conseguente

Ma non conoscono già i termini "dividendo" e "divisore" o numeratore e denominatore?

G.Flaccavento Romano

Dai programmi della scuola media (1979)

L'argomento "proporzioni" non deve essere appesantito imponendo come nuove regole che sono implicite nelle proprietà delle operazioni aritmetiche,

ma deve essere finalizzato alla scoperta delle leggi di proporzionalità

$(y = kx\ ;\ xy = k)$

Dalle Indicazioni nazionali 2012

Spazio e figure

- ***Riconoscere figure piane simili in vari contesti e riprodurre in scala una figura assegnata***

Dalle Indicazioni nazionali 2012

Numeri

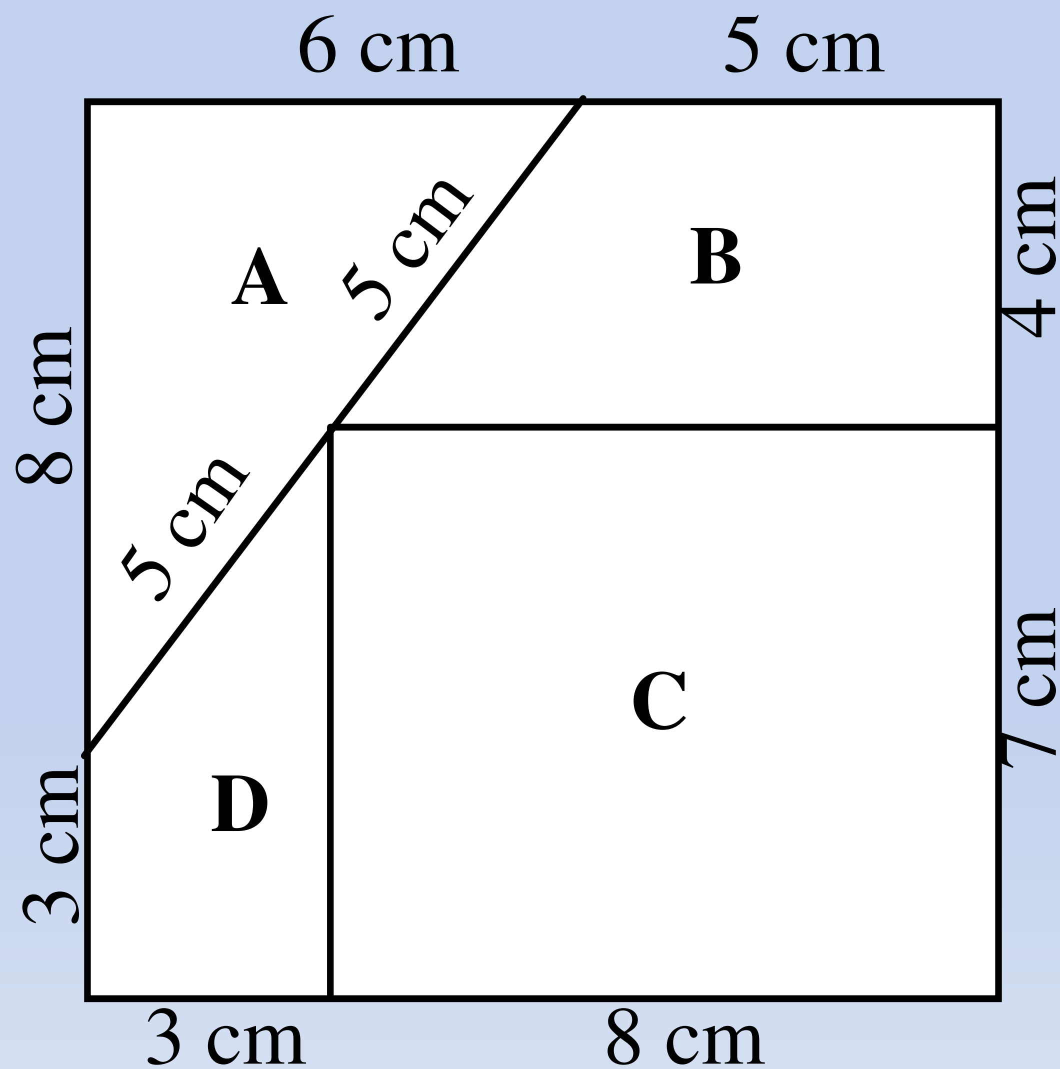
- ***Comprendere il significato di percentuale e saperla calcolare utilizzando strategie diverse***

- ***Interpretare una variazione percentuale di una quantità data come una moltiplicazione per un numero decimale.***

Il puzzle

Il puzzle rappresentato in figura va ingrandito: il segmento che misura 4 cm deve misurarne 6 sul puzzle ingrandito.

Ingrandite ciascuno dei quattro pezzi e costruite così il nuovo grande puzzle.



Da un problema di G. Brousseau

“ingrandire”

dal dizionario **Baruk**, Edizione italiana a cura di **Francesco Speranza** e **Lucia Grugnetti**, pag. 276, alla voce

INGRANDIMENTO: s.m. XVII sec., da “grande”

a. **I** (Italiano) Riproduzione di un oggetto in dimensioni maggiori **conservando i rapporti**. La parola è particolarmente usata in fotografia.

b. **M** (Matematica) La parola ingrandimento è entrata di recente, con rimpicciolimento o riduzione, nel vocabolario pedagogico-matematico.
Cfr. riduzione e ingrandimento (alle pagine 520-522).

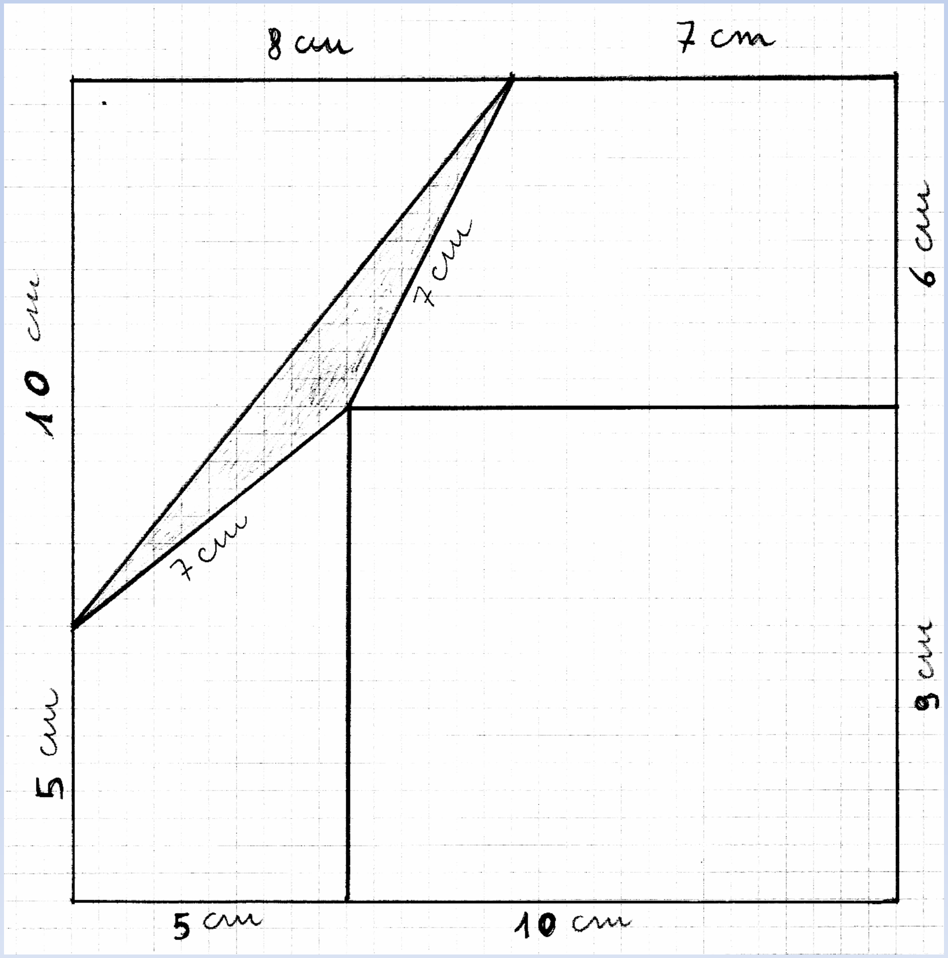
Il puzzle

Analisi delle difficoltà

Si tratta di superare la concezione "additiva", riconoscendo un problema di proporzionalità.

La strategia del ritaglio permette un controllo immediato della soluzione.

Il puzzle “ingrandito”



Le Marmellate (cat. 6,7,8) 15°RMT,F,12

C’è la raccolta delle ciliegie.

La nonna prepara la marmellata in un enorme paiolo, per la sua famiglia e i vicini.

Lunedì cuoce 8 kg di ciliegie con 5 kg di zucchero.

Martedì cuoce10 kg di ciliegie con 7 kg di zucchero.

Giovedì, giorno di maggior raccolta, cuoce 16 kg di ciliegie con 10 kg di zucchero.

Sabato, fine della raccolta, cuoce 5 kg di ciliegie con 3 kg di zucchero.

Qual è il giorno in cui la nonna ha preparato la marmellata più zuccherata?

Ci sono giorni in cui le marmellate hanno lo stesso grado di dolcezza?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Le Marmellate 15°RMT,F,12

ANALISI A PRIORI

Analisi del compito

Rendersi conto che bisogna considerare simultaneamente le due grandezze e non ci si può basare soltanto sullo zucchero

Rendersi conto che sarebbe possibile fare confronti se la quantità di una delle due grandezze fosse la stessa, di conseguenza provare a raddoppiare, triplicare, ... dividere per due, ... ciascuna delle quantità.

Esempio:

8 kg di ciliegie e 5 kg di zucchero

16 kg di ciliegie e10 kg di zucchero

Porta a concludere che la percentuale di zucchero delle marmellate di **lunedì e giovedì sarà la stessa.**

Le Marmellate 15°RMT,F,12

Inoltre raddoppiando le quantità di sabato :

10 kg di frutta e 6 kg di zucchero

e confrontando con martedì:

10 kg di frutta e 7 kg di zucchero

si può dire che

la marmellata di sabato è meno zuccherata di quella di martedì.

Si possono poi confrontare le marmellate di martedì e giovedì, facendo coincidere una delle quantità.

100 kg di frutta per 70 kg di zucchero il martedì

112 kg di frutta per 70 kg di zucchero il giovedì

e si conclude che

la marmellata di martedì è più zuccherata di quella di giovedì.

Le Marmellate 15°RMT,F,12

La marmellata più zuccherata è dunque quella di martedì,

le marmellate di lunedì e di giovedì hanno la medesima percentuale di zucchero.

Con procedure «esperte»:

calcolare i rapporti giornalieri fra zucchero e marmellata:

	lunedì	**martedì**	**giovedì**	**sabato**
zucchero(in kg)	5	7	10	3
ciliegie (in kg)	8	10	16	5
rapporto	*5/8*	**7/10**	*10/16*	3/5
	=0,625	**= 0,7**	*= 0,625*	= 0,6

Le Marmellate 15°RMT,F,12

Oppure:

calcolare i rapporti giornalieri di massa di zucchero/massa totale:

	lunedì	**martedì**	**giovedì**	**sabato**
zucchero (in kg)	5	7	10	3
ciliegie (in kg)	8	10	16	5
rapporto	5/13	7/17	*10/26*	3/8
	≈ 0,38	≈ 0,41	≈ 0,38	≈ 0,375

Punteggi medi di “Le marmellate” (60 elaborati delle classi finaliste di tutte le sezioni):

- cat. 6 : 1,2
- cat. 7 : 2,0
- cat. 8 : 2,5

secondo la griglia seguente:

4 Risposte corrette e complete (*martedì marmellata più zuccherata, lunedì e giovedì egualmente zuccherata*) con spiegazione chiara sulla base dei rapporti

3 Risposte corrette e complete con spiegazione incompleta

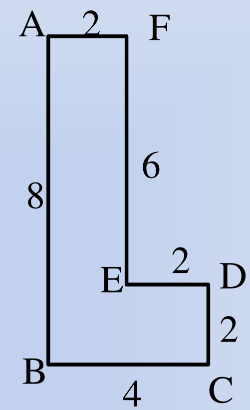
2 Una delle risposte corrette, con spiegazione

oppure le due risposte corrette senza spiegazione

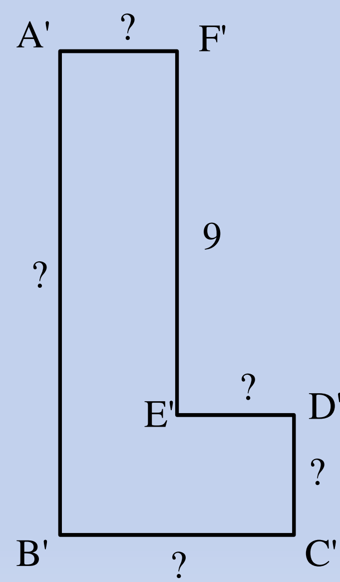
1 Una delle risposte corretta, senza spiegazione

0 Procedure di confronto degli scarti o incomprensione del problema

Federica ha voluto ingrandire il disegno :

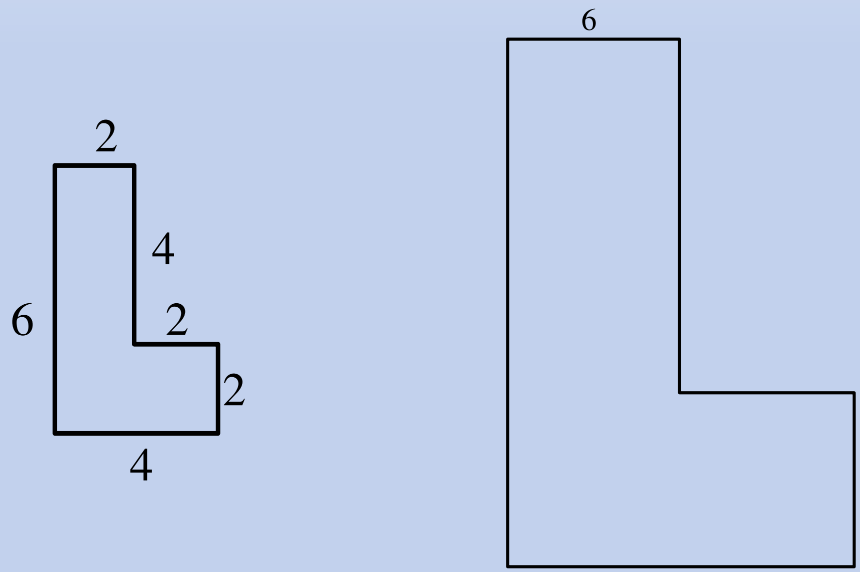


e ha ottenuto questo:



Senza misurare, trova le dimensioni mancanti della seconda figura

Mauro ha voluto imitare Federica e ha fatto questi due disegni:

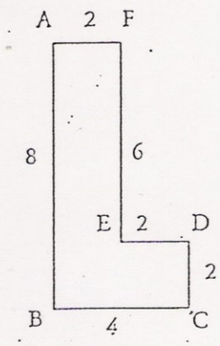


Senza misurare, trova le dimensioni mancanti della seconda figura

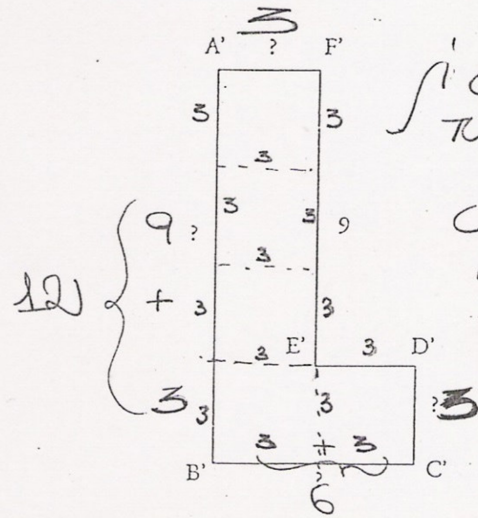
Utilizzabili sia come introduzione alla scuola secondaria di primo grado, che come "diagnosi" alle superiori

CLASSE I^ A MICHELANGELO

• Federica ha voluto ingrandire il disegno:



e ha ottenuto questo



SI CALCOLA TUTTO CON 3 CHE È LA MISURA DEL LATO DEL QUADRATO IN CUI SI PUÒ DIVIDERE LA FIGURA

Senza misurare, trova le dimensioni mancanti della seconda figura.

L'ACQUARIO

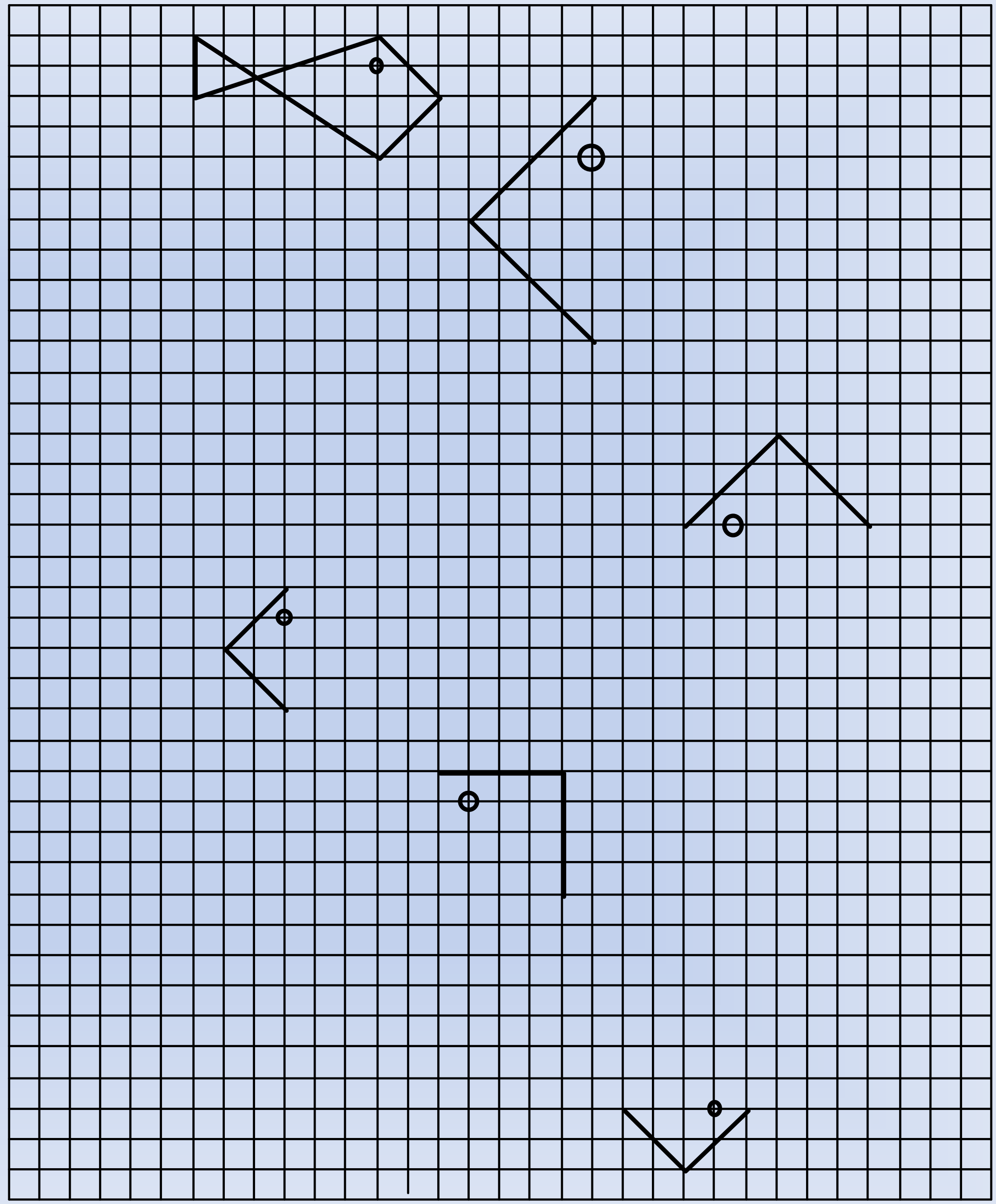
In questo acquario c'è tutta la famiglia Pesci:

il nonno, papà, mamma e i loro tre piccoli, di cui uno è già stato disegnato per intero.

Naturalmente si somigliano tutti. Anche se non hanno tutti le stesse dimensioni, sono tutti della stessa forma.

Completate i disegni del resto della famiglia Pesci.

Cercate di fare dei disegni precisi.



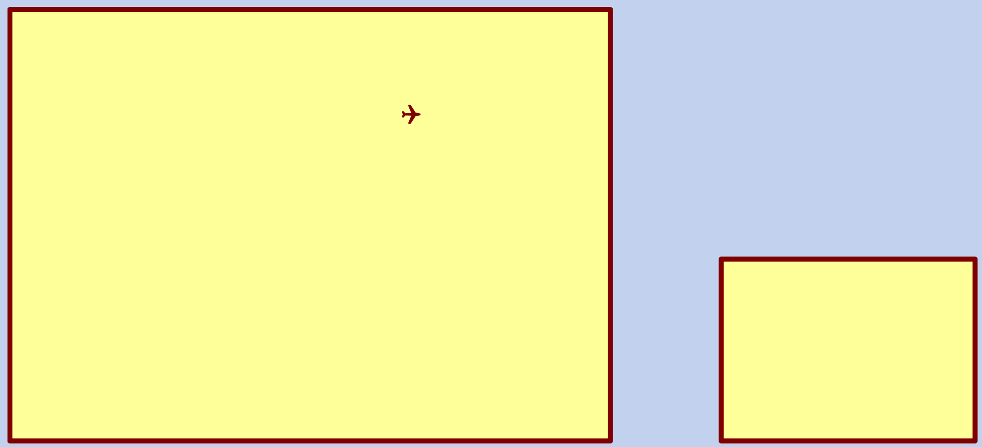
- Aspetti geometrici: traslazioni, rotazioni, simmetrie
- Rapporto di similitudine irrazionale
- Possibilità di inizio di calcolo letterale

per individuare esplicitamente il rapporto di similitudine (è $\sqrt{2}$, quindi un lato corrisponde ad una diagonale nel pesce-mamma)

La domanda aggiuntiva : “Quale è la mamma?”
permette un confronto tra 4 e $3\sqrt{2}$)

DOVE SI POSA LA MOSCA?

R.M.T. 1999: 7°, I, 15



Il rettangolo di destra è la fotografia del grande rettangolo di sinistra.

Nel momento in cui la fotografia è stata scattata, una mosca si è posata sul rettangolo grande.

Il fotografo però quando ha stampato la fotografia l'ha cancellata.

Rimettete la mosca al posto giusto sulla foto.

Spiegate come avete proceduto.

Analisi a priori

- **procedure di tipo aritmetico**:

determinare il fattore di riduzione della fotografia a partire dai due rettangoli (eventualmente verificando che è il medesimo per le due dimensioni): 2,5 : 6 = 3,5 : 8,4 = 5 : 12 determinare poi le coordinate della mosca sul foglio e calcolare le coordinate corrispondenti sulla foto.

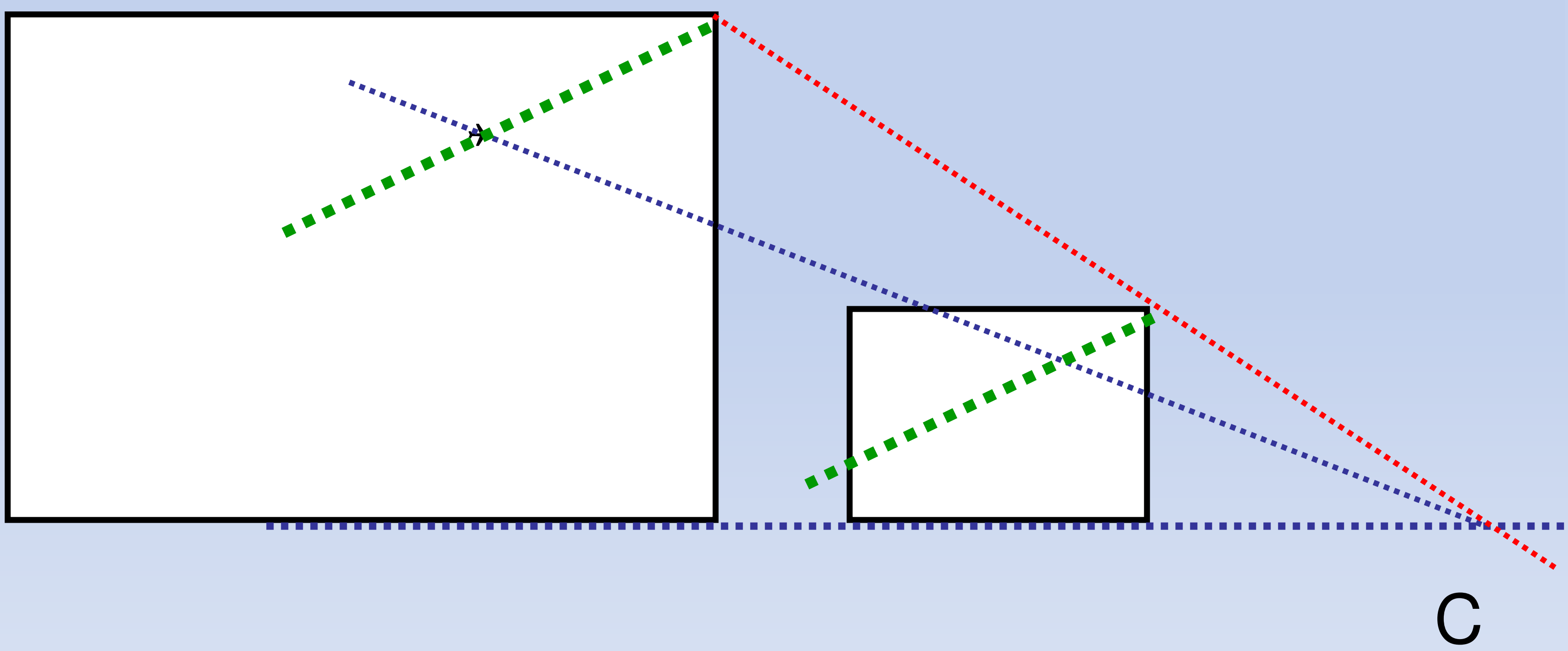
- **procedure di tipo geometrico**:

tracciare due rette passanti ciascuna per la mosca e (ad es.) per un vertice del foglio e condurre poi le parallele corrispondenti sulla foto e individuare “la mosca” dalla loro intersezione (basandosi sulle proprietà delle similitudini);

oppure cercare il centro di omotetia, intersecando due rette congiungenti punti corrispondenti e procedere utilizzando le proprietà dell’omotetia.

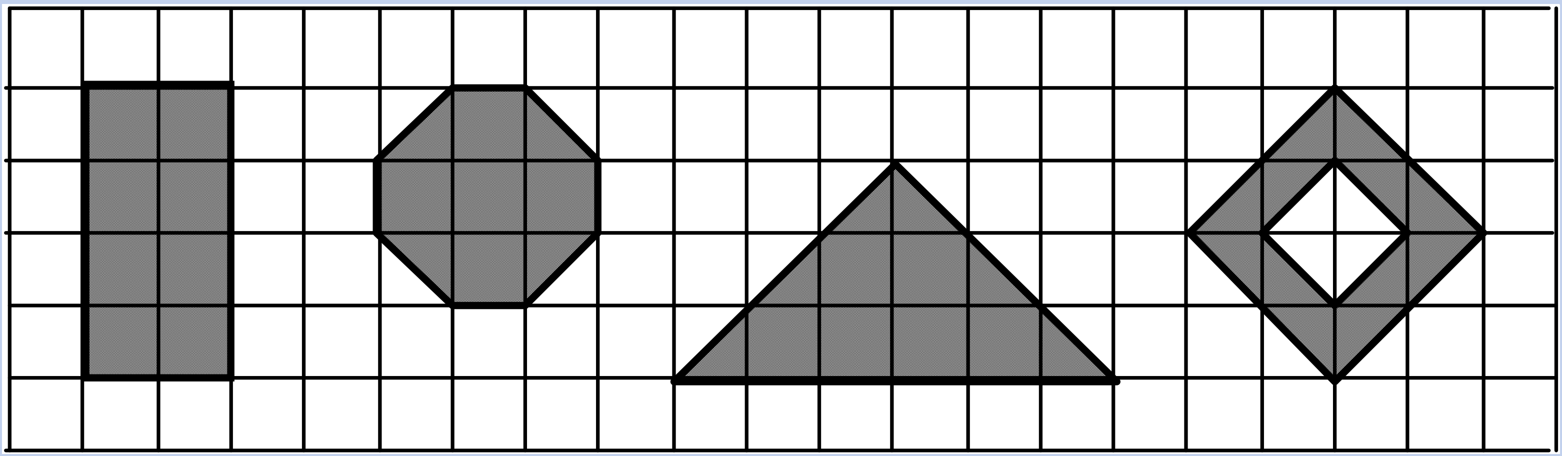
La mosca: una soluzione grafica

Omotetia di centro C



DECORAZIONI (Cat. 5, 6, 7) **9°, II**

Un pittore ha dipinto quattro figure diverse su un muro.



Ha utilizzato dei barattoli di colore della stessa grandezza: 18 barattoli di rosso per una figura, 21 barattoli di blu per un’altra figura, 27 barattoli di giallo per un’altra figura ancora e alcuni barattoli di nero per la figura che resta. Alla fine del suo lavoro, tutti i barattoli erano vuoti.

Indicate il colore di ogni figura.

Quanti barattoli di colore nero ha utilizzato?

Spiegate come avete trovato la risposta.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale :

- Geometria : confronto e misura di aree, definire un’unità di misura di aree
- Aritmetica : proporzionalità

Analisi del compito:

- Scegliere un’unità di misura per l’area
- contare il numero di unità in ogni figura
- Classificare le figure secondo la loro area, in triangoli: doppio quadrato (12), ottaedro (14), rettangolo (16), triangolo (18) o in quadrati: doppio quadrato (6), ottaedro (7), rettangolo (8), triangolo (9)
- Fare la corrispondenza tra le aree delle figure e i numeri dei barattoli di colore (losanghe in rosso, ottaedro in blu, rettangolo in nero e triangolo in giallo)
- Trovare il numero di barattoli di colore nero (24)

DECORAZIONI (Cat. 5, 6, 7) **9°, II**

Attribuzione dei punteggi per il Rally

4 Indicazione del numero di barattoli di colore con spiegazioni (indicazione del colore di ogni figura e relazione area/numero di barattoli)

3 Indicazione del numero di barattoli di colore, senza spiegazioni

2 Indicazione dell’area di ciascuna figura e errore di calcolo per il numero dei barattoli di colore nero

1 Valutazione “ ad occhio” delle superfici (spiegazione del tipo ”si è visto che …) o inizio di risoluzione del problema

0 Risposte non in linea con il problema

- L’analisi a priori non esplicita i possibili ragionamenti che gli allievi potrebbero fare per stabilire la corrispondenza tra le aree e il numero di barattoli.
- Analisi a posteriori: 130 elaborati; tutti i gruppi scelgono il quadrato come unità d’area, circa il 90% calcola correttamente le aree e l’80% in media (dal 72% della categoria 5 al 92% della categoria 7) trova il numero di barattoli di nero. Il problema è stato dunque giudicato « facile » e proposto anche ad allievi più giovani, sia in gruppo che individualmente, con una percentuale di risposte corrette maggiore del 50%.

Alle quattro aree trovate:

8 , 7 , 9 e **6** (in quadrati della quadrettatura)

occorre far corrispondere i

tre numeri dati per i barattoli:

18 (rossi), **21** (blu), **27** (gialli)

per trovare il numero incognito di neri (**24**)

Ricorso alla regolarità:

Circa il 20% degli elaborati mostrano il ricorso alla regolarità della successione

6,7,8,9

che riportano su quella del numero dei barattoli, a volte correttamente, a volte no

Esempi di elaborati:

- *24 pots noirs, il y a toujours 3 de différence :*

18 – 21 – 24 – 27

- *Ce ne sono 30 (18 – 21 – 27 – 30)*
- *Sono 39*

Spiegazione: 18 + 3 = 21

21 + 6 = 27

27 + 12 = 39

abbiamo notato che ce ne sono sempre il doppio di 3

Ricorso al fattore 3

si nomina esplicitamente il fattore 3 ,

si riconosce che la sequenza è fatta da multipli di 3 e ciò conduce alla risposta esatta

Esempi:

- *Per trovare la risposta, si deve sempre fare 3 volte. Quindi ha utilizzato 24 barattoli di nero*

- *Si è contato il numero di quadrati in ogni figura e si è moltiplicato per 3 ogni numero di quadrati nelle figure e si è fatto allo stesso modo per sapere quanti ce ne sono di neri (24).*

- *Il a utilisé 24 pots de peinture (noire).*

Explication : Si on fait $3 \times 6 = 18$, après on fait $3 \times 9 = 27$ ensuite $3 \times 7 = 21$ ensuite il restait 24 car ce qu'on a fait $3 \times 8 = 24$ on l'a mis en noir.

Ma …

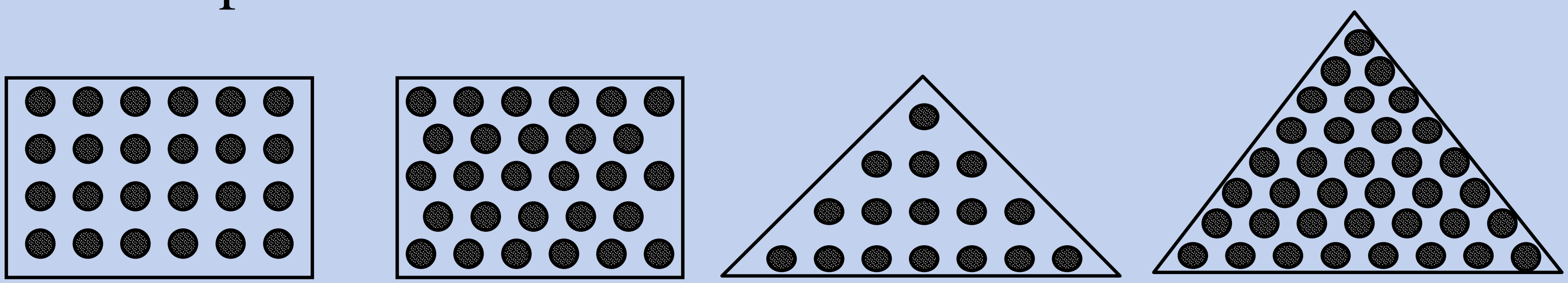
Anche chi ha risposto correttamente,

ha fatto veramente ricorso al pensiero proporzionale?

Si può rispondere correttamente con un ragionamento sbagliato o poco “consapevole”

TARTUFI AL CIOCCOLATO (Cat. 6, 7, 8) **11°, F**

Ecco qualche confezione della ditta Tartuffardi contenenti tutte lo stesso tipo di tartufi al cioccolato:



Classico Alternato Piccolo Tribù

Ed ecco le etichette che indicano il peso del contenuto, da incollare sulle confezioni:

540 g

810 g

630 g

Ma queste etichette non sono in ordine e ne manca una.

Trovate la confezione per la quale non c'è etichetta e indicate il suo peso.

Spiegate il vostro ragionamento.

- fattore non intero: 22,5

(per scoprirlo occorre fare numerosi tentativi)

- successione

16, 24, 28, 36

(meno facile di 6,7,8,9 di « Decorazioni »)

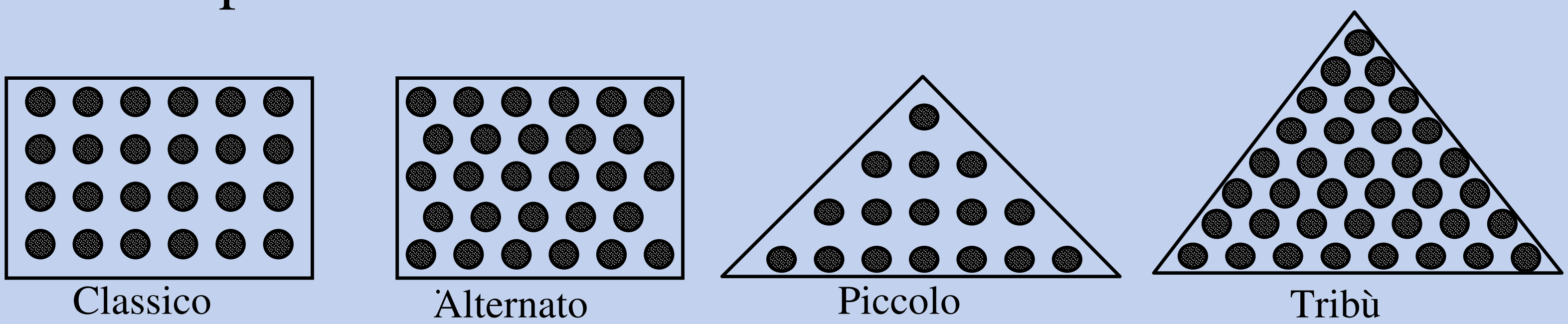
- successione incompleta

540, 630, 810

(con numeri più grandi)

TARTUFI AL CIOCCOLATO (versione cat. 5, 6)

Ecco qualche confezione della ditta Tartuffardi contenenti tutte lo stesso tipo di tartufi al cioccolato:



Ed ecco le etichette che indicano il peso del contenuto, da incollare sulle confezioni:

600 g

700 g

900 g

Ma queste etichette non sono in ordine e ne manca una.

Trovate la confezione per la quale non c'è etichetta e indicate il suo peso.

Spiegate il vostro ragionamento.

Domanda

Lavorare per problemi è guadagno o perdita di tempo?

Gli allievi che mediante "buoni problemi" affrontati in gruppo, hanno superato autonomamente l'ostacolo rappresentato dalla struttura additiva,

hanno maggiormente interiorizzato il pensiero proporzionale

e, di conseguenza,

hanno maggiori capacità a ***medio o lungo termine*** *di* ***riconoscere*** *una situazione di proporzionalità?*

(Rinaldi, Grugnetti, Cattini 1999)

METODOLOGIA DI CONTROLLO

Ideazione di problemi

- in ambiti differenti
- in situazioni “vicine” alla esperienza
- atti a provocare conflitti cognitivi in chi non riconosce situazioni di proporzionalità (possibilmente auto-validanti)
- proposti lontano dalle lezioni sulla proporzionalità
- senza parole-chiave che possano innescare automaticamente gli schemi legati alla proporzionalità

I problemi ideati sono stati proposti, singolarmente, ad allievi di :

- Classi **del terzo anno di scuola secondaria di primo grado** in cui la proporzionalità

è stata introdotta mediante “buoni problemi” (con metodologia socio-costruttivista)

Classi P

- Classi (di controllo) **del terzo anno di scuola secondaria di primo grado e del biennio di scuola secondaria di secondo grado** in cui la proporzionalità è stata introdotta in modo tradizionale

Classi T

IL COLORE DEL MARE

Un amico ci ha detto che per riprodurre un particolare colore del mare, dobbiamo mescolare tra loro quattro diversi colori e ci ha consigliato le rispettive quantità, che sono riportate nella tabella qui sotto.

Purtroppo abbiamo a disposizione una quantità diversa del primo colore.

Riesci a determinare le quantità degli altri colori, in modo che il colore finale non cambi?

COLORE	QUANTITA' CONSIGLIATA	QUANTITA' EFFETTIVA
Verde scuro	70 ml	50 ml
Azzurro cielo	40 ml	
Giallo chiaro	25 ml	
Bianco	20 ml	

Spiegazione:____

____

RISULTATI

MARE	n° elaborati	GIUSTO	SBAGLIATO	ADD
CLASSI P	68	55,8%	44,2%	46,6%
CLASSI T	217	14,7%	85,3%	77,83%

ADD: indica la percentuale di chi, tra chi sbaglia, commette l'errore di applicare la strategia "additiva" (togliere 20)

La percentuale di risposte corrette può sembrare bassa nelle classi P, ma è molto meglio che nelle classi T

Il fatto che un colore vada a zero, cosa che rende il problema auto-validante, pare provocare ripensamenti nelle classi P: tra chi sbaglia è molto più bassa la percentuale di chi applica la strategia additiva.

Nota: Agendo sulle variabili didattiche numeriche, si possono facilmente ottenere versioni del problema adatte anche alla scuola primaria.

CHIMICA

Sul testo di chimica, abbiamo trovato che per neutralizzare 10 ml di una soluzione fortemente acida occorre aggiungere 80 ml di un composto alcalino.

Noi però dobbiamo neutralizzare 25 ml della soluzione acida.

Quanti millilitri del composto alcalino dovremo utilizzare?

Spiegazione:____________________________________

____

____

- Contesto meno “famigliare”
- Numeri “più facili”

CHIMICA	n° elaborati	GIUSTO	SBAGLIATO	ADD
CLASSI P	66	82,4%	7,6%	10,3%
CLASSI T	214	47,7%	52,3%	40,2 %

I numeri più semplici facilitano il superamento dell’ostacolo.

Strategie significative osservate:

25 x 8 = 200

80 + 80 + 40 = 200 (perché 25 = 10 + 10 + 5)

IL COLORE VIOLA

Abbiamo preparato una bella tinta viola mescolando 50 ml di blu e 30 ml di rosso.

A un certo punto abbiamo esaurito il colore e ci restano solo 40 ml di blu per rifarlo.

Quanti millilitri di rosso dovremo utilizzare per ottenere lo stesso colore?

Spiegazione:____

____

____

____

Se in un'altra occasione volessimo utilizzare 50 ml di rosso, quanto blu dovremmo unire per ottenere sempre lo stesso colore?

Spiegazione:____

____

____

____

RISULTATI

VIOLA 1	n° allievi	GIUSTO	SBAGLIATO	strategia additiva
CLASSI P	68	49,2%	50,8%	70%
CLASSI T	220	20,9%	79,1%	86,78%

VIOLA 2	n° allievi	GIUSTO	SBAGLIATO	strategia additiva
CLASSI P	67	42,4%	57,6%	71%
CLASSI T	220	11%	89%	83,3%

Alcune considerazioni sui risultati

Il campione significativo e l’ampliamento temporale della ricerca consentono di affermare che

laddove il pensiero proporzionale è stato introdotto attraverso la proposta di problemi risolti **autonomamamente** con il ricorso ad una strategia moltiplicativa,

a lungo termine avviene più facilmente il riconoscimento di un problema di proporzionalità in contesti differenziati.

Bibliografia

- Atti delle giornate di studio sul Rally Matematico Transalpino
- Rinaldi M.G., Medici D., *Un approccio costruttivo alla formalizzazione*, Progettare Lavorare Scoprire, a cura di Vighi P., pp.107-118, Grafiche Step editrice, Parma 2010, ISBN 88 7898 054 4
- M.G.Rinaldi, L.Grugnetti, T.Cattini, *Il controllo dell'apprendimento a medio e lungo termine*, Atti del Convegno III Internuclei Scuola dell'Obbligo, Vico Equense, 1999
- Levain, Vergnaud, *Proportionalité simple, proportionalité multiple,* Grand N, 36, 1995